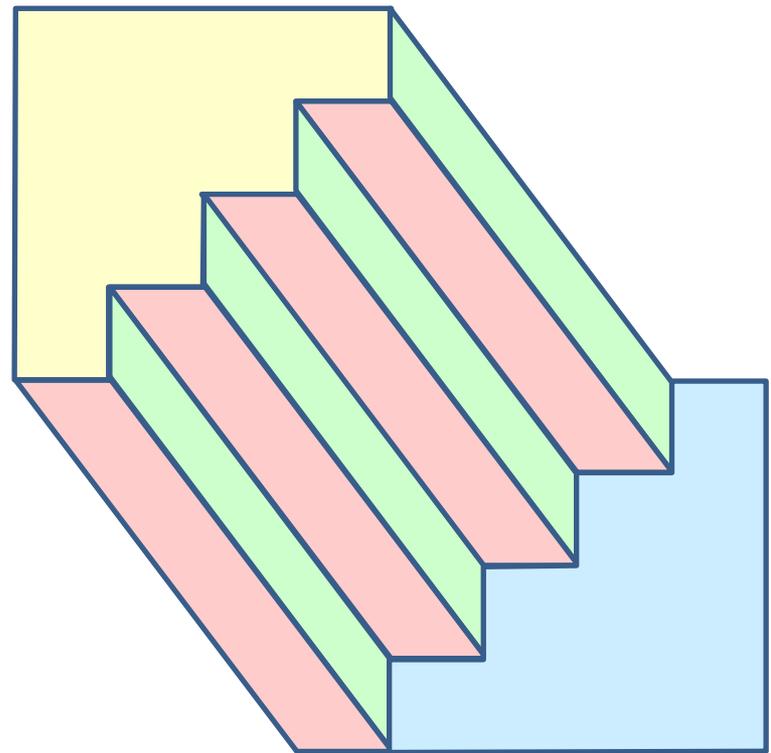
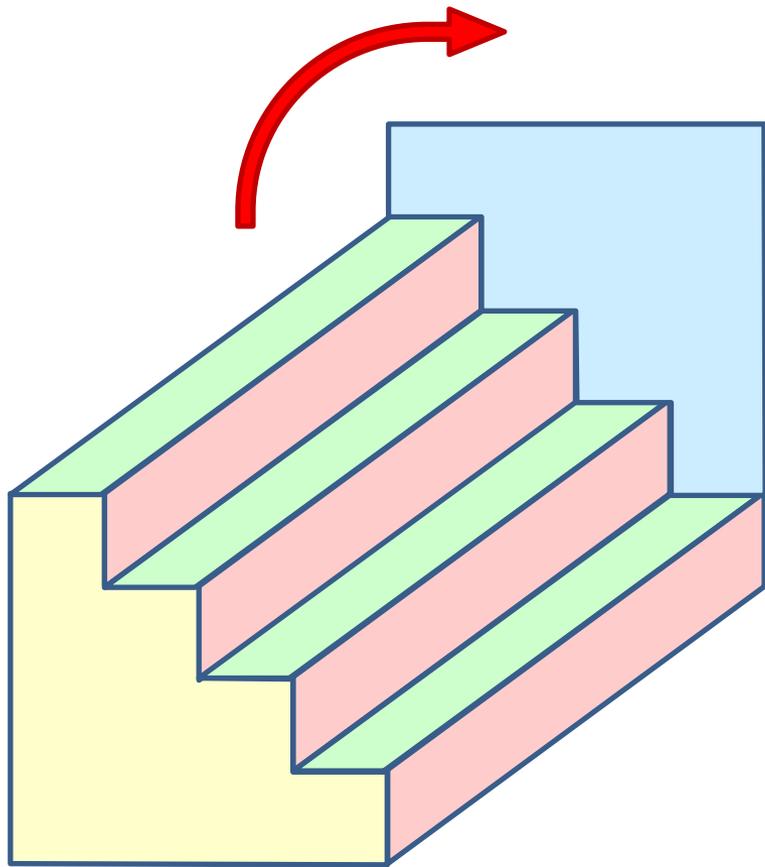


# **Förderung der Raumvorstellung im Mathematikunterricht**

Reinhard Schmitt-Hartmann



## Die Raumvorstellung ist ...

... die Fähigkeit,  
in der Vorstellung räumlich zu sehen  
und räumlich zu denken

Peter H. Maier

„Vorstellung ersetzt erst dann das  
Handeln, wenn es von diesem  
ausreichend Erkenntnisse  
gewonnen hat.“

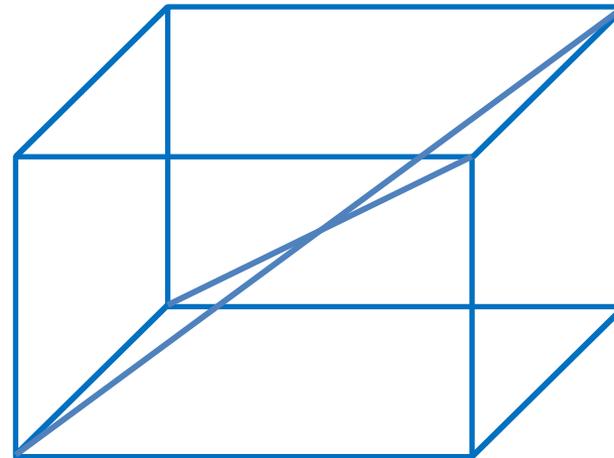
Piaget

## Die Raumvorstellung ist notwendig für ...

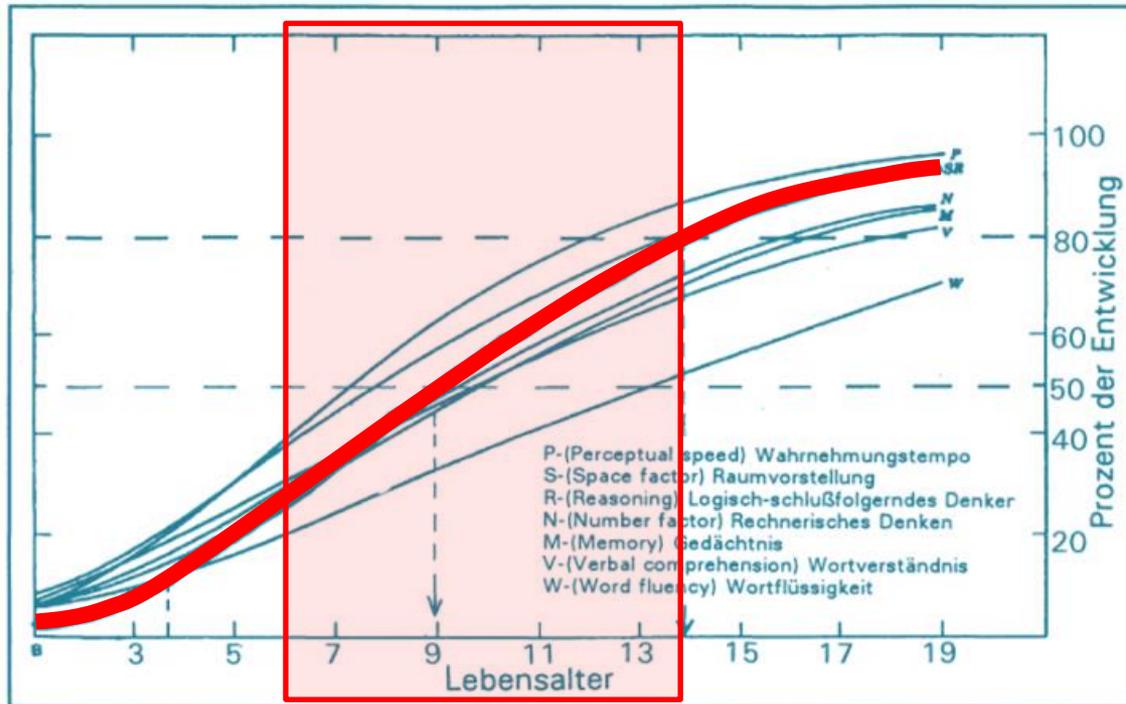
- **die Schule** (Mathematik, Naturwissenschaften, Kunst...)
- **den Alltag** (Orientierung, Verpacken...)
- **Berufe** (Medizin, handwerkliche Berufe...)

# Teilkomponenten der Raumvorstellung

1. Räumliche Wahrnehmung
2. Veranschaulichung
3. Mentale Rotation
4. Beziehungen
5. Orientierung



# Entwicklung der Raumvorstellung



Geschätzte Kurven für die Entwicklung der Thurstone'schen Intelligenzfaktoren

# Kopfgeometrie

... umfasst alle mündlich – im Kopf – zu lösenden geometrischen Aufgaben, die das visuelle Wahrnehmungs - und das räumliche Vorstellungsvermögen schulen.

Marianne Franke

## Kopfgeometrie

- Operationen an Figuren und Körpern werden im Kopf vorgenommen
- Wissen und Fähigkeiten werden miteinander in Beziehung gesetzt
- Problemlösungen mithilfe von räumlichen Denken

## Kopfrechnen

- Automatisierung von Algorithmen mithilfe von elementaren Aufgaben
- Fertigkeiten werden ausgebildet, bei denen Vorstellungen und das Problemlösen nur eine untergeordnete Rolle spielen

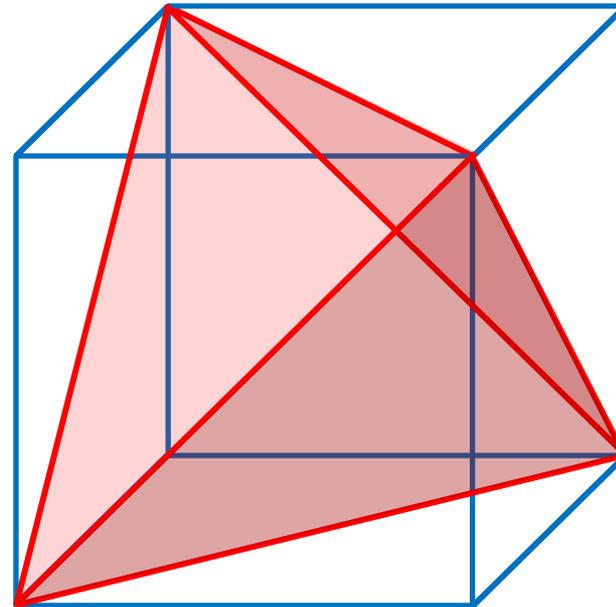
# Kopfgeometrieaufgaben

... fördert die Prozesskompetenzen

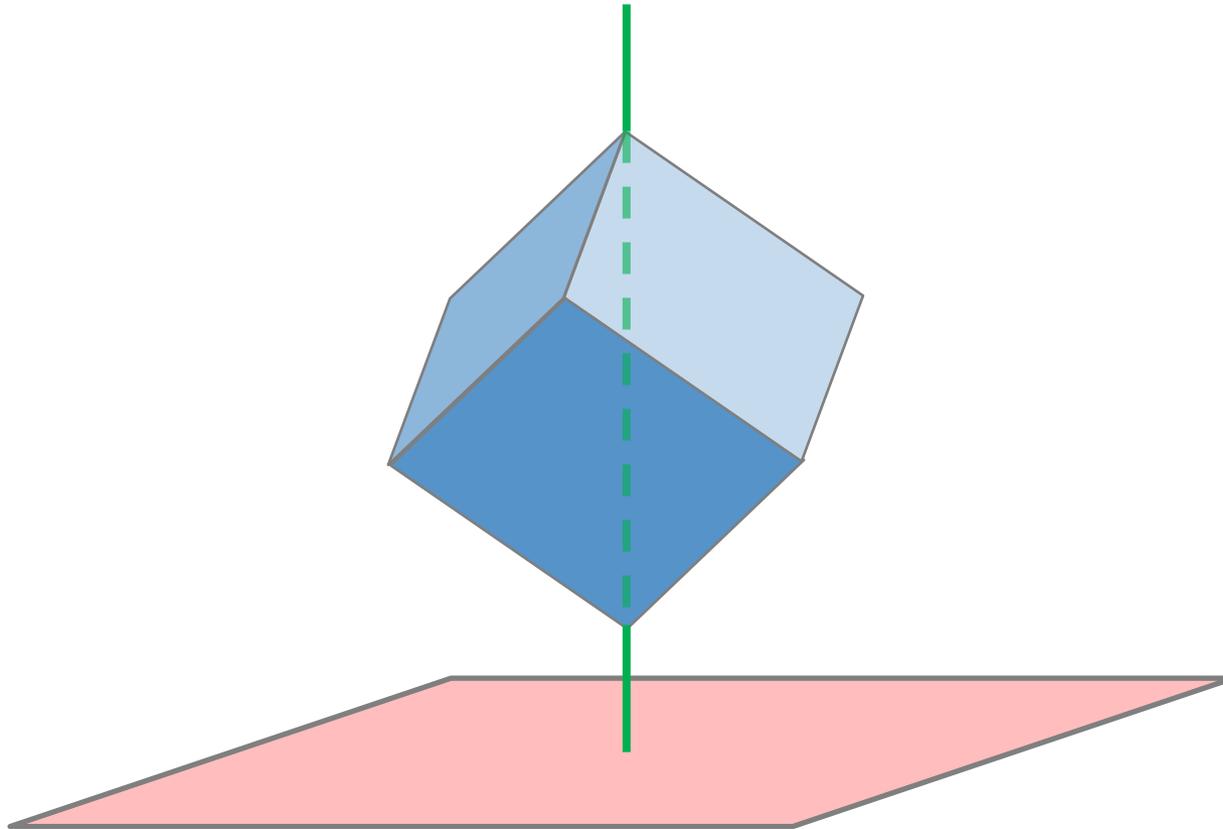
- Probleme lösen
- Kommunizieren
- Argumentieren und Beweisen

# Diagonalen im Würfel

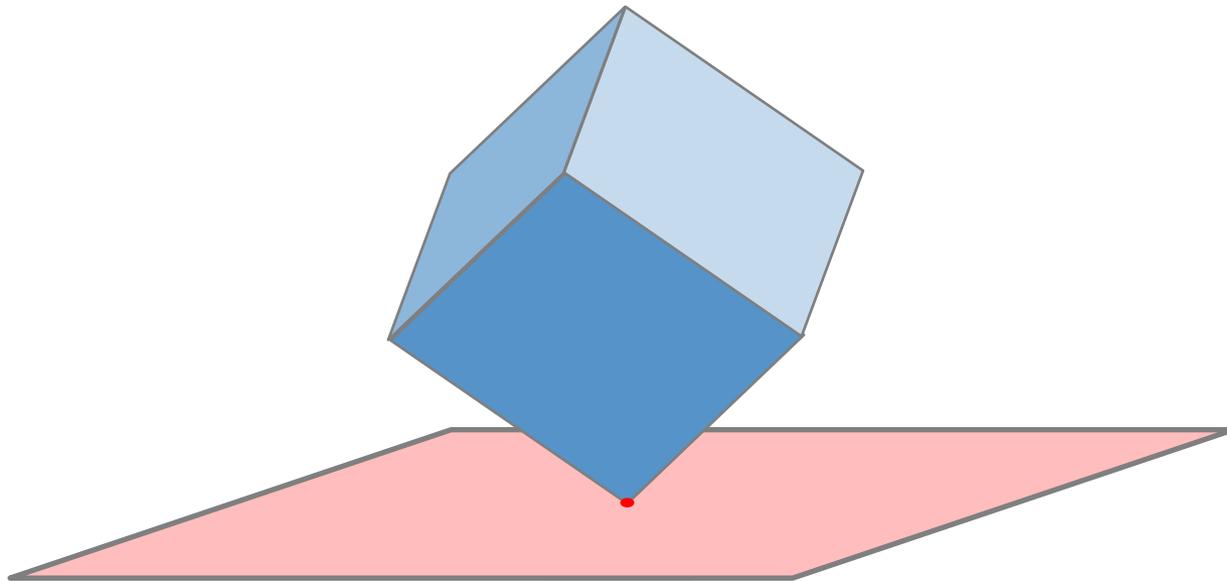
1. Denken Sie sich einen Würfel.
2. Ergänzen Sie in der Deckfläche eine Diagonale.
3. Ergänzen Sie in der Grundfläche eine Diagonale, die orthogonal zur ersten liegt.
4. Verbinden Sie alle Diagonalenendpunkte miteinander. Geben Sie an, welcher Körper dadurch entsteht.



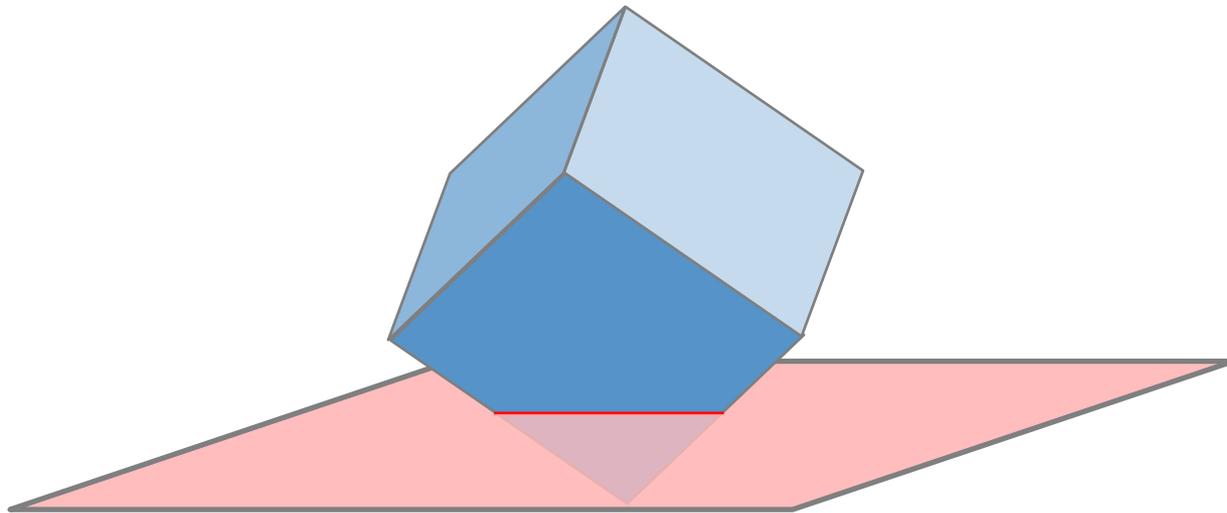
# Veranschaulichung / Visualisierung



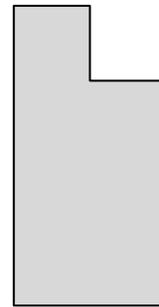
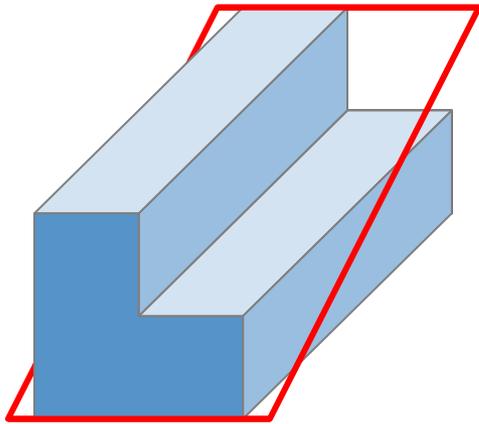
# Veranschaulichung / Visualisierung



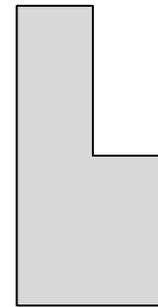
# Veranschaulichung / Visualisierung



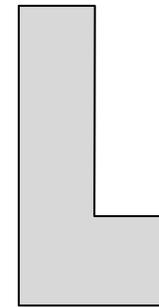
# Schnittflächen



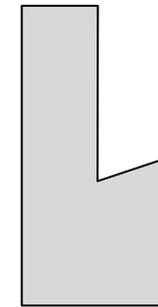
A



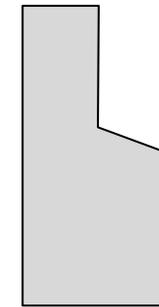
B



C



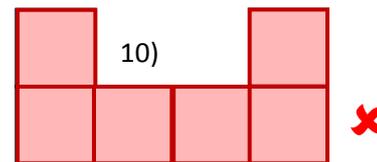
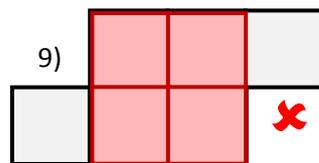
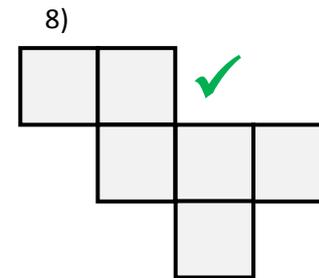
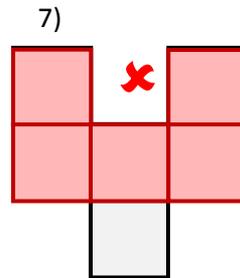
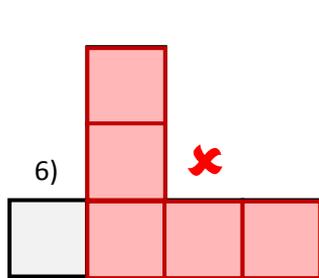
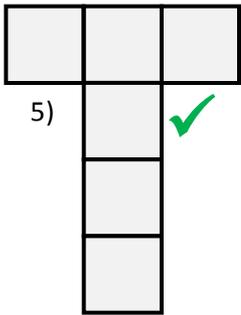
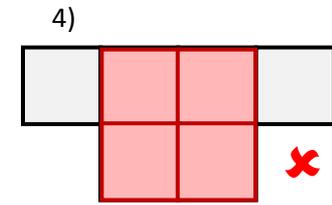
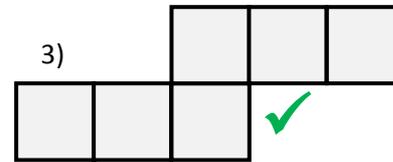
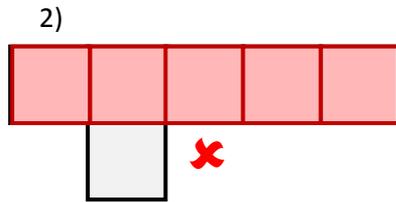
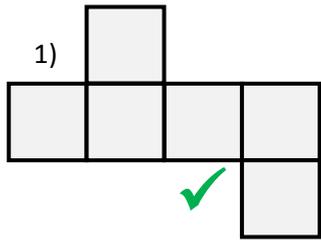
D



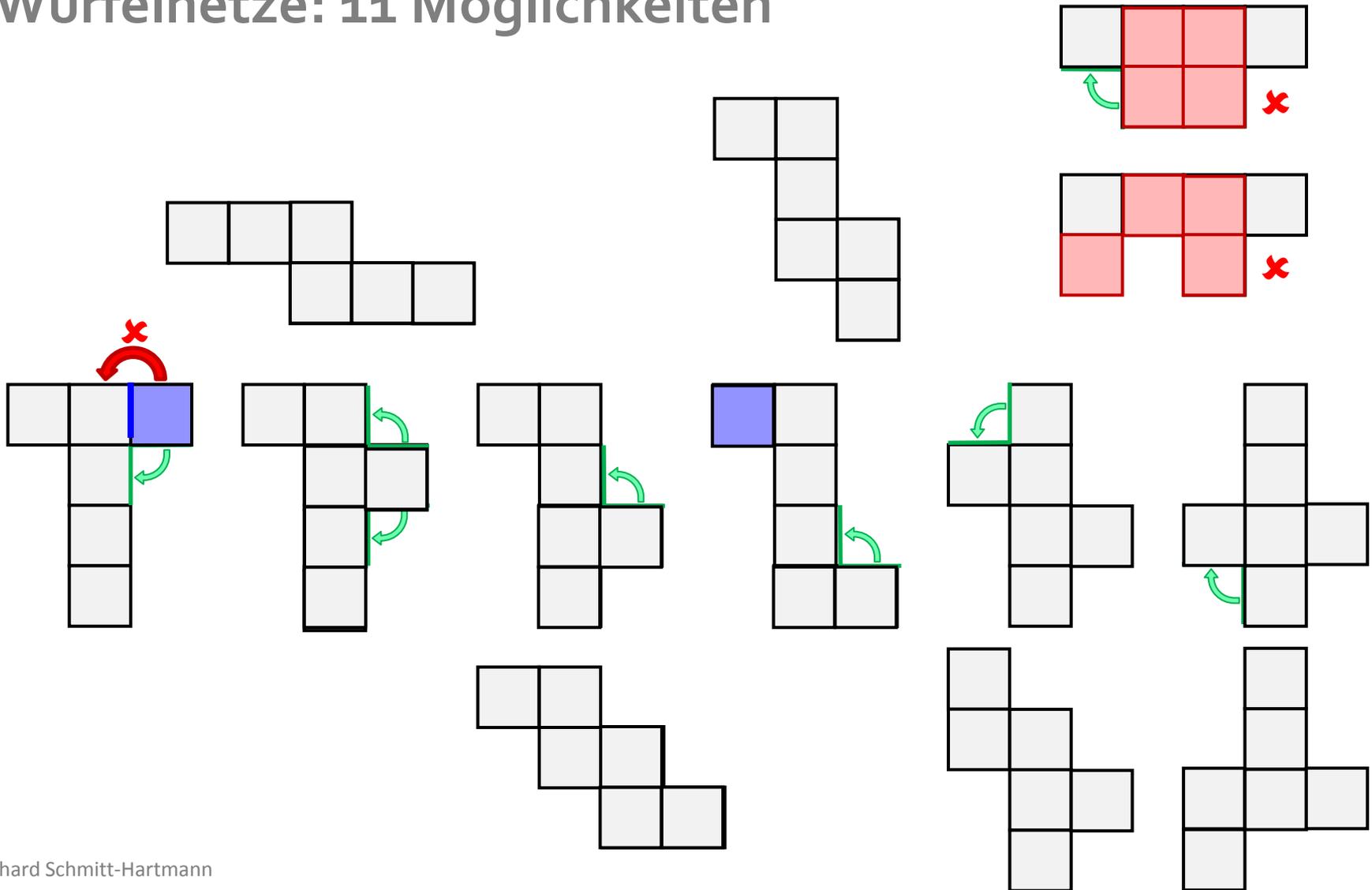
E



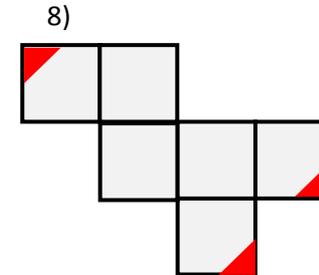
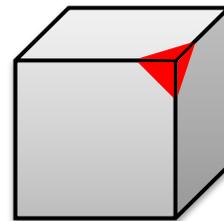
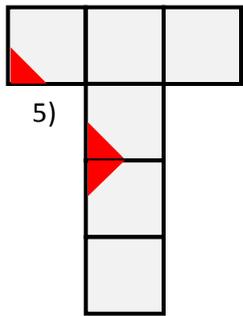
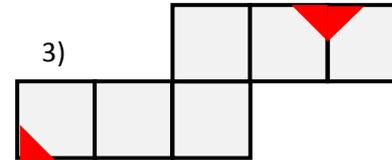
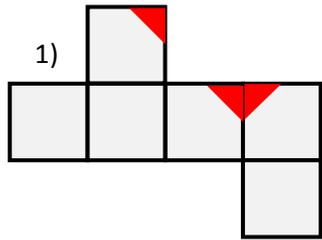
# Würfelnetze



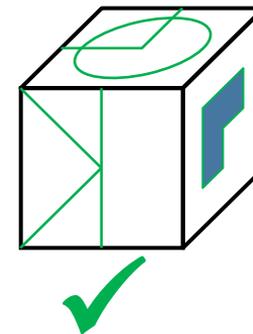
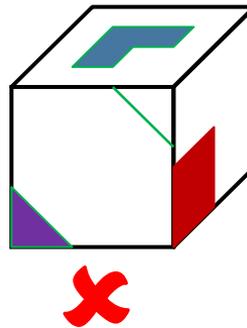
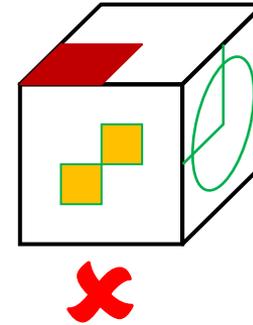
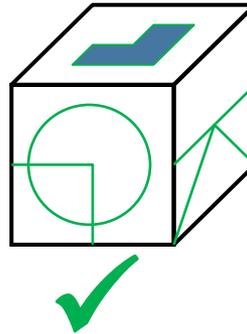
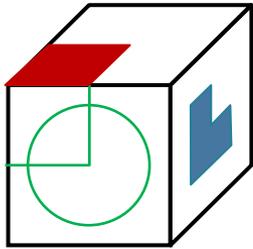
# Würfelnetze: 11 Möglichkeiten



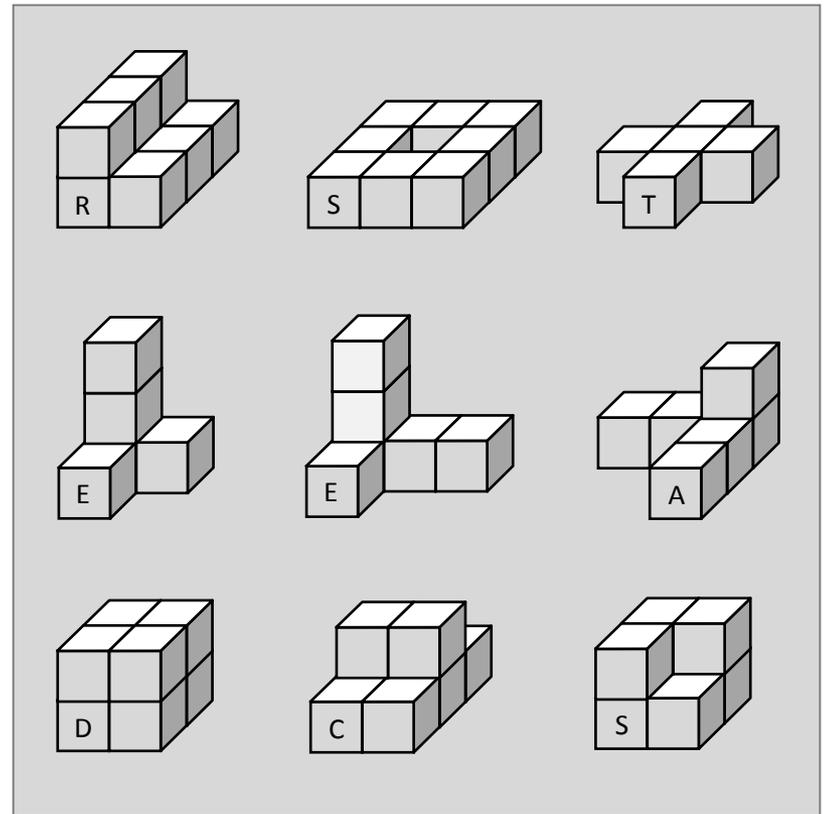
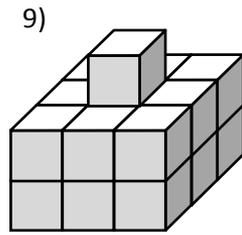
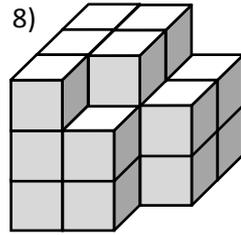
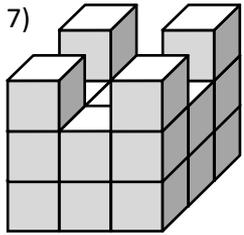
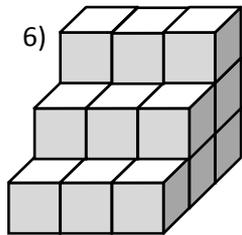
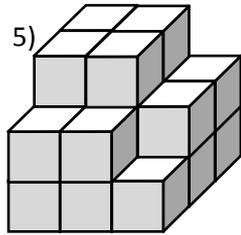
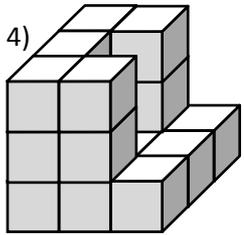
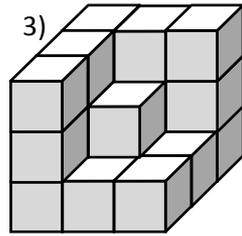
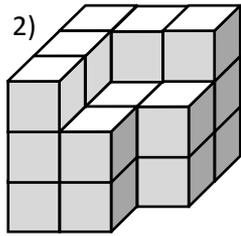
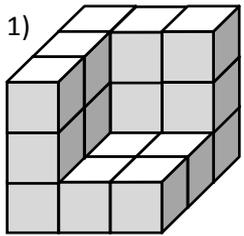
# Würfelnetze



# Körperrotationen



# Körperrotationen

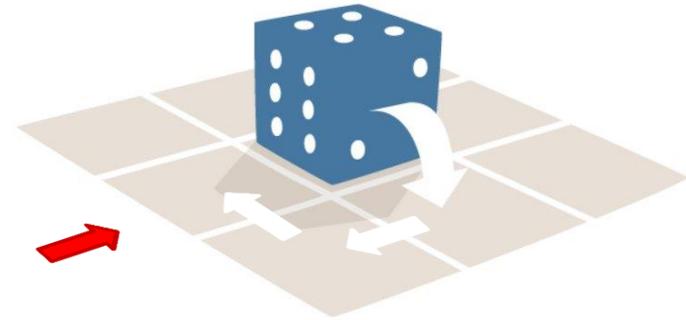


DESCARTES

# Würfelfelder

1. Welche Zahl zeigt der abgebildete Würfel, wenn er zunächst nach rechts, dann nach vorne und schließlich nach links gekippt wird?
2. Kann man für das Neunerfeld (oder auch ein größeres Feld) ein Muster erstellen, bei dem jedes Feld eine eindeutige gewürfelte Zahl zeigt?

Welche Vereinbarung müsste man treffen, damit ein solches Zahlenmuster eindeutig existiert?

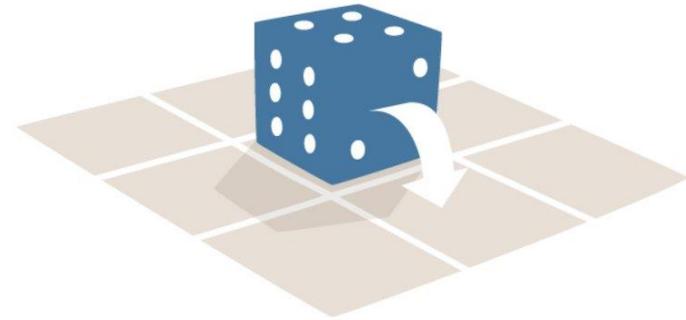


6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
2	4	5	3	2	4	5	3	2	4	5
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	3	2	4	5	3	2	4	5	3	2
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
2	4	5	3	2	4	5	3	2	4	5
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	3	2	4	5	3	2	4	5	3	2
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
2	4	5	3	2	4	5	3	2	4	5
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

# Würfelfelder

Ein Würfel, neun Felder: Legen Sie einen Würfel auf das mittlere Feld. Bewegen Sie den Würfel über jedes Feld und addieren Sie die Zahlen, die er anzeigt. Wie muss der Würfel auf dem mittleren Feld liegen, damit die Summe maximal ist.

nach ZEIT ONLINE (28.06.2016)



$$\begin{aligned}
 &14 + 3 \cdot y + 2 \cdot z \\
 &= 14 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot 5 \\
 &= \underline{\underline{42}}
 \end{aligned}$$

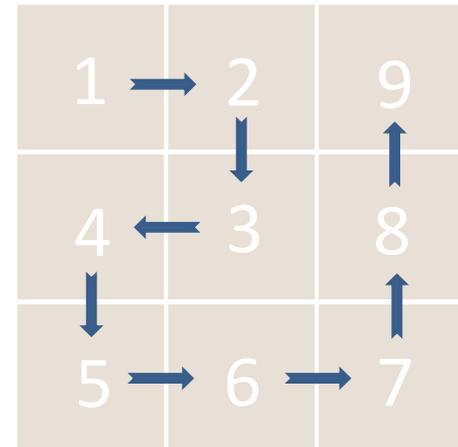
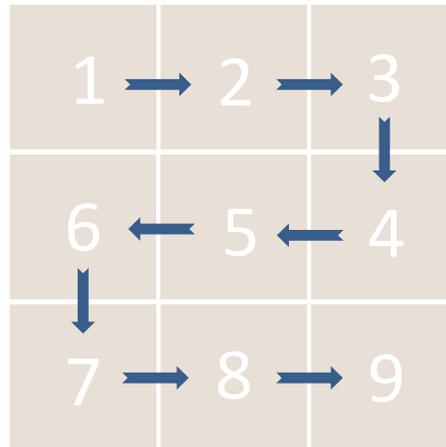
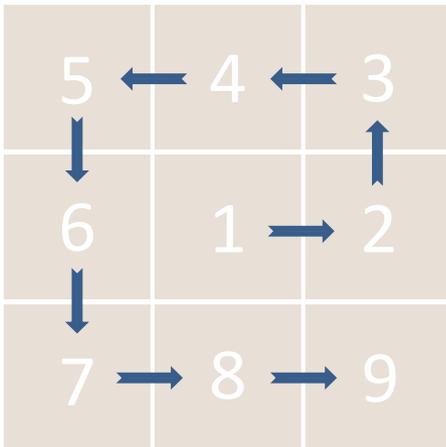
$7 - x$	$y$	$x$
$z$	$y$	$z$
$x$	$y$	$7 - x$

# Würfelfelder

Ein Würfel, neun Felder: Legen Sie einen Würfel auf das mittlere Feld. Bewegen Sie den Würfel über jedes Feld und addieren Sie die Zahlen, die er anzeigt. Wie muss der Würfel auf dem mittleren Feld liegen, damit die Summe maximal ist.

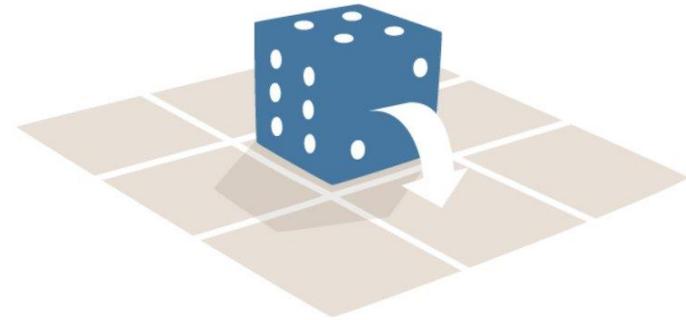


nach ZEIT ONLINE (28.06.2016)



# Würfelfelder

Ein Würfel, neun Felder: Legen Sie einen Würfel auf das mittlere Feld. Bewegen Sie den Würfel über jedes Feld und addieren Sie die Zahlen, die er anzeigt. Wie muss der Würfel auf dem mittleren Feld liegen, damit die Summe maximal ist.



nach ZEIT ONLINE (28.06.2016)

$x$	$y$	$7 - x$
$z$	$y$	$z$
$7 - x$	$y$	$x$

$$14 + 3 \cdot y + 2 \cdot z = 42$$

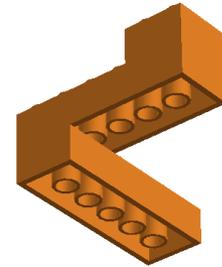
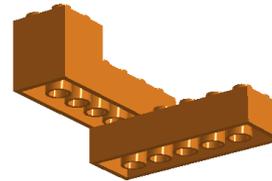
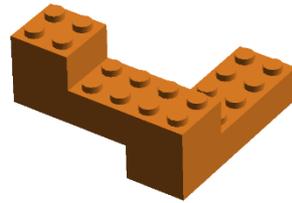
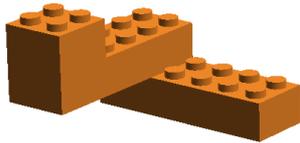
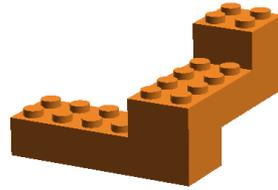
$x$	$y$	$7 - x$
$7 - z$	$y$	$z$
$x$	$y$	$7 - x$

$$14 + 3 \cdot y + 7 = 39$$

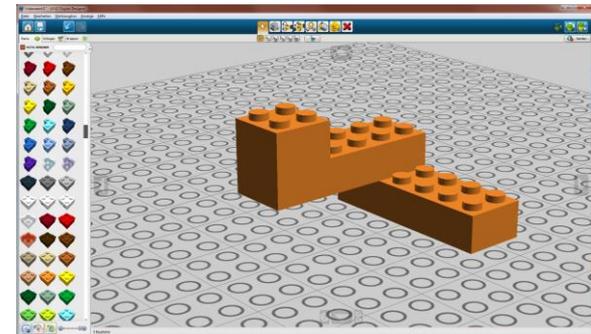
$x$	$y$	$7 - y$
$x$	$z$	$x$
$7 - y$	$z$	$y$

$$3 \cdot x + 14 + 2 \cdot z = 42$$

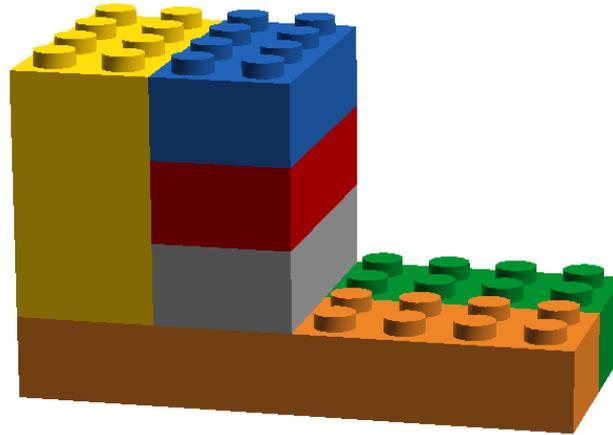
# Körperrotationen



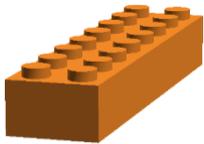
Lego  
Digital  
Designer



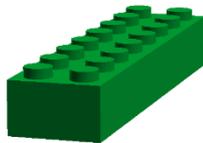
# Berührungsflächen



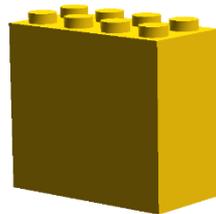
Wie viele andere Bausteine berühren die einzelnen Bausteine?



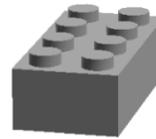
3



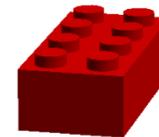
3



5



4

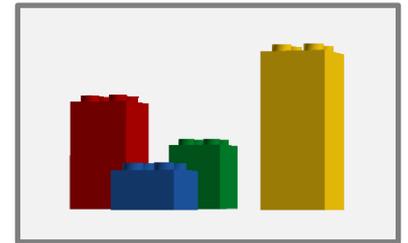
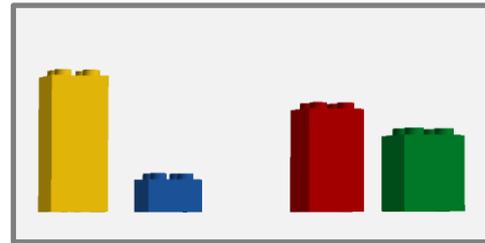
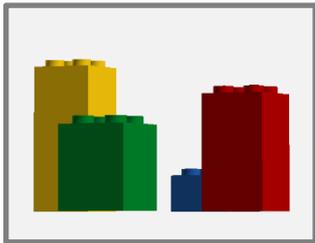
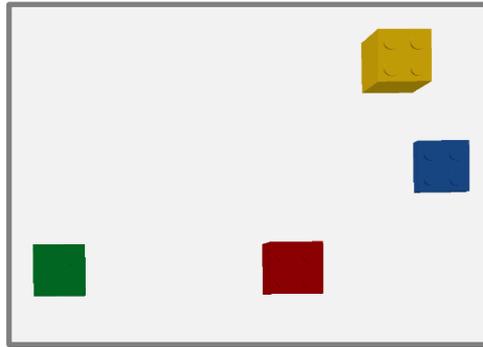


3

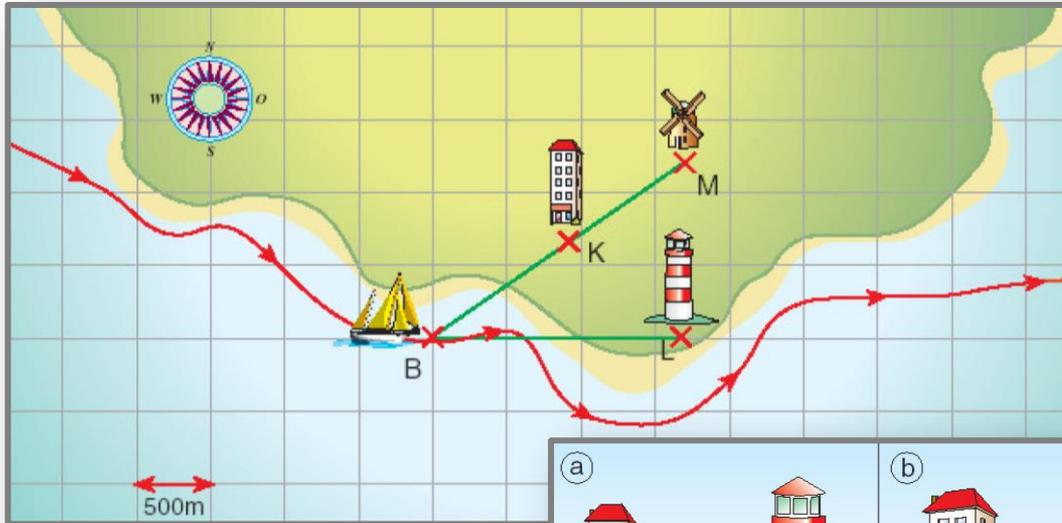


2

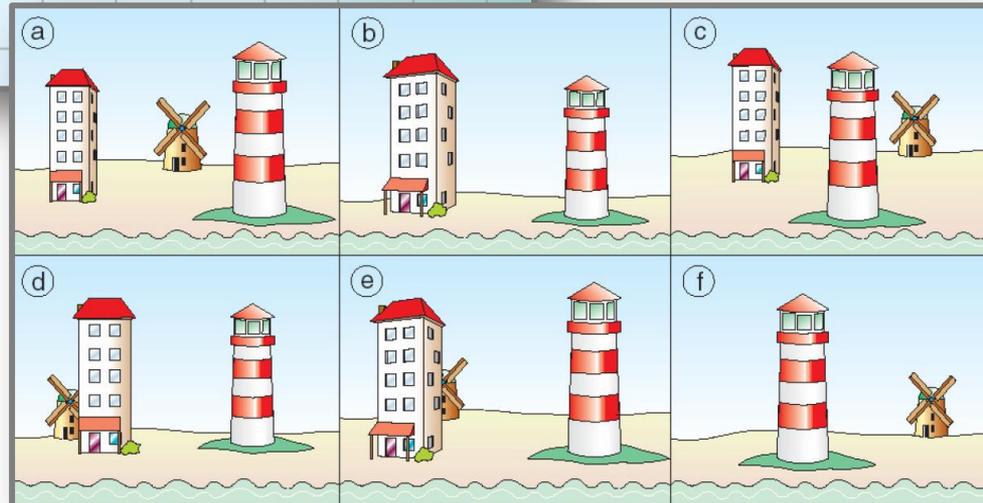
# Räumliche Orientierung



# Räumliche Orientierung

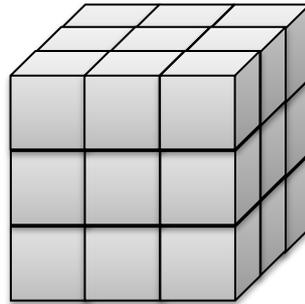


aus Mathematik Neue Wege, Klasse 5



# Veranschaulichung / Visualisierung

Wie viele Ecken hat ein Würfel, bei dem alle Ecken „abgeschnitten“ worden sind?

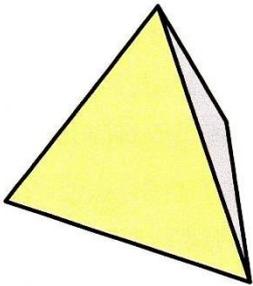


Wie verändert sich die Oberfläche und der Rauminhalt, wenn man alle „Ecken“ wegnimmt?

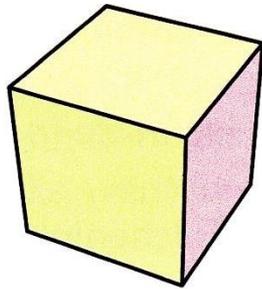
Wie verändert sich die Oberfläche und der Rauminhalt, wenn man alle „Kanten“ wegnimmt?

Beschreiben Sie den Würfel ohne „Ecken“ bzw. ohne „Kanten“.

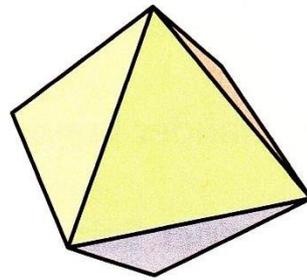
# Körper aus Papier



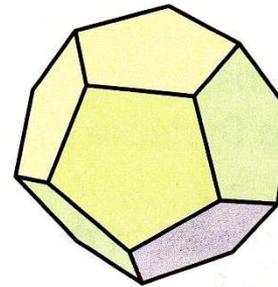
Tetraeder



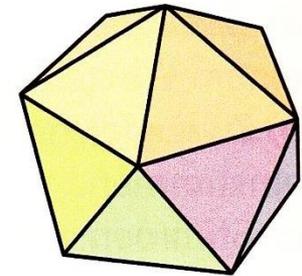
Hexaeder



Oktaeder

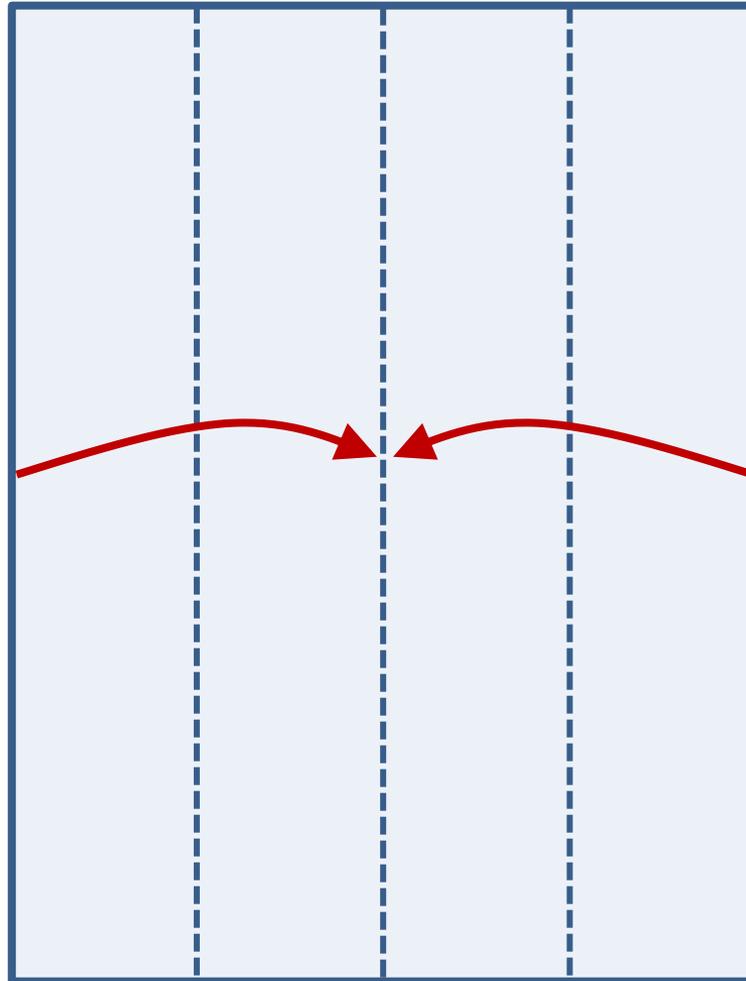


Dodekaeder

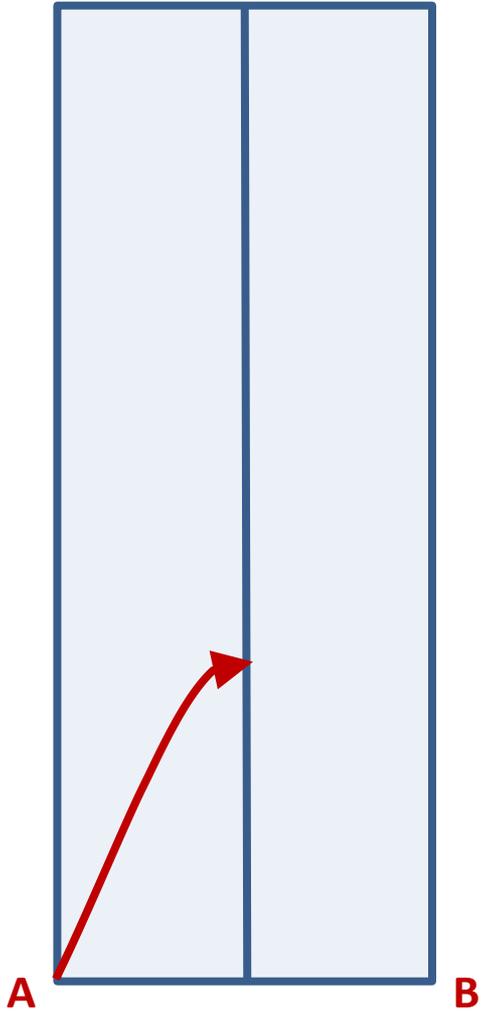


Ikosaeder

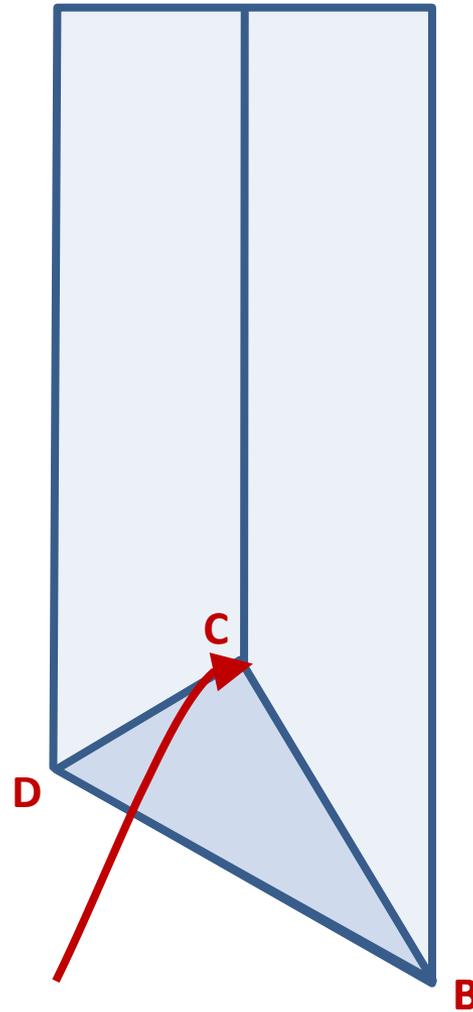
# Tetraeder



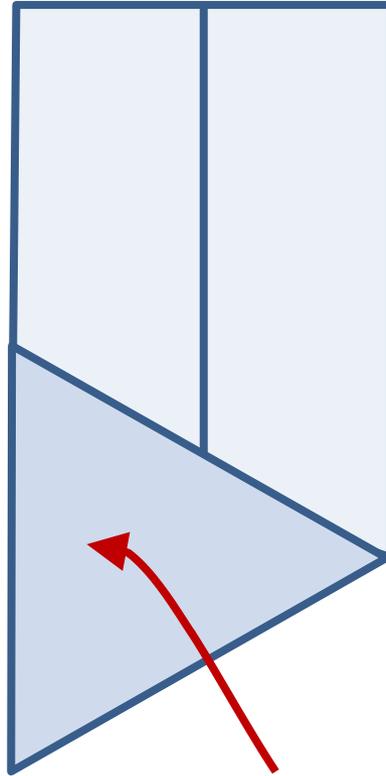
# Tetraeder



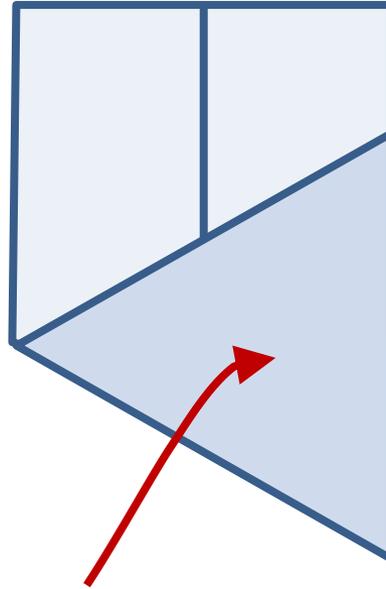
# Tetraeder



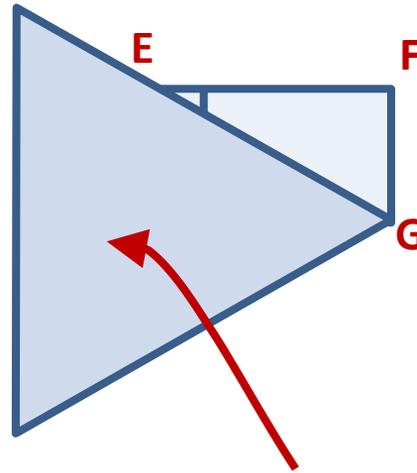
# Tetraeder



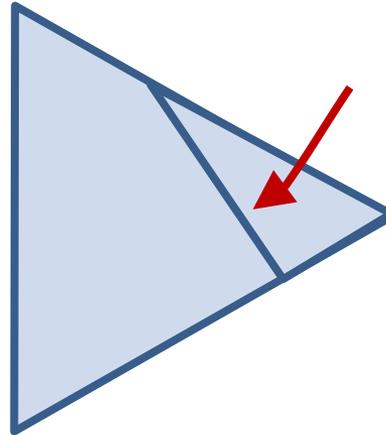
# Tetraeder



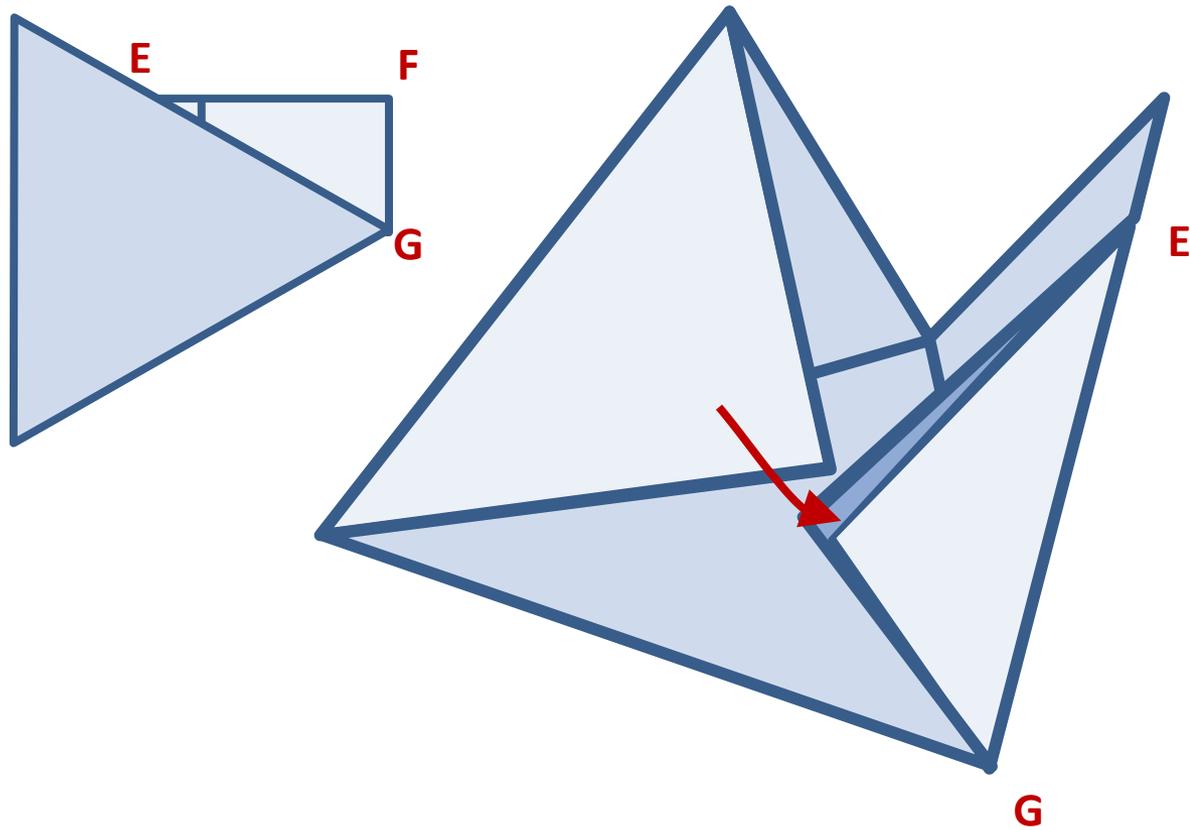
# Tetraeder



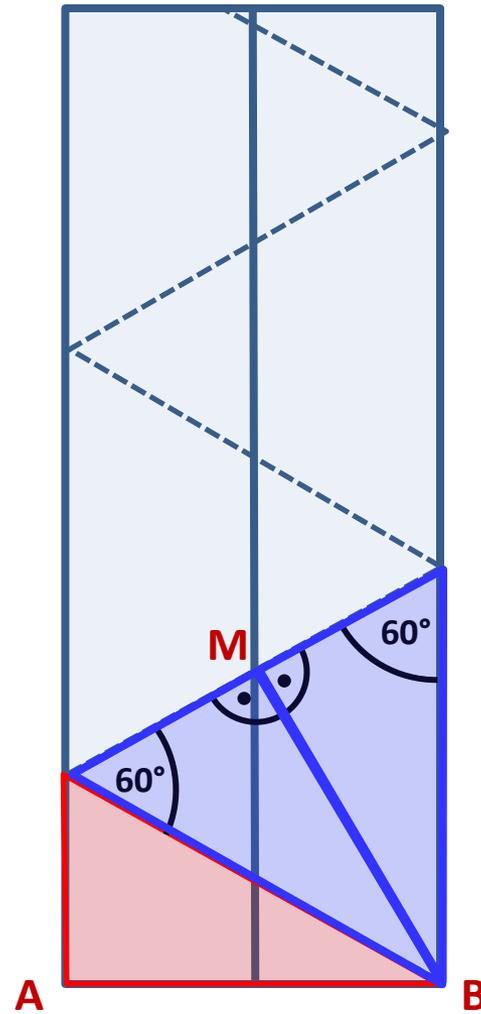
# Tetraeder



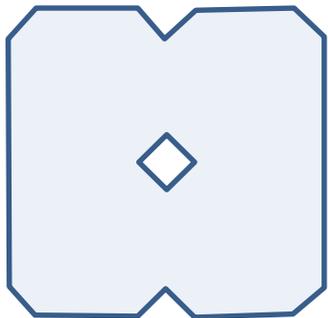
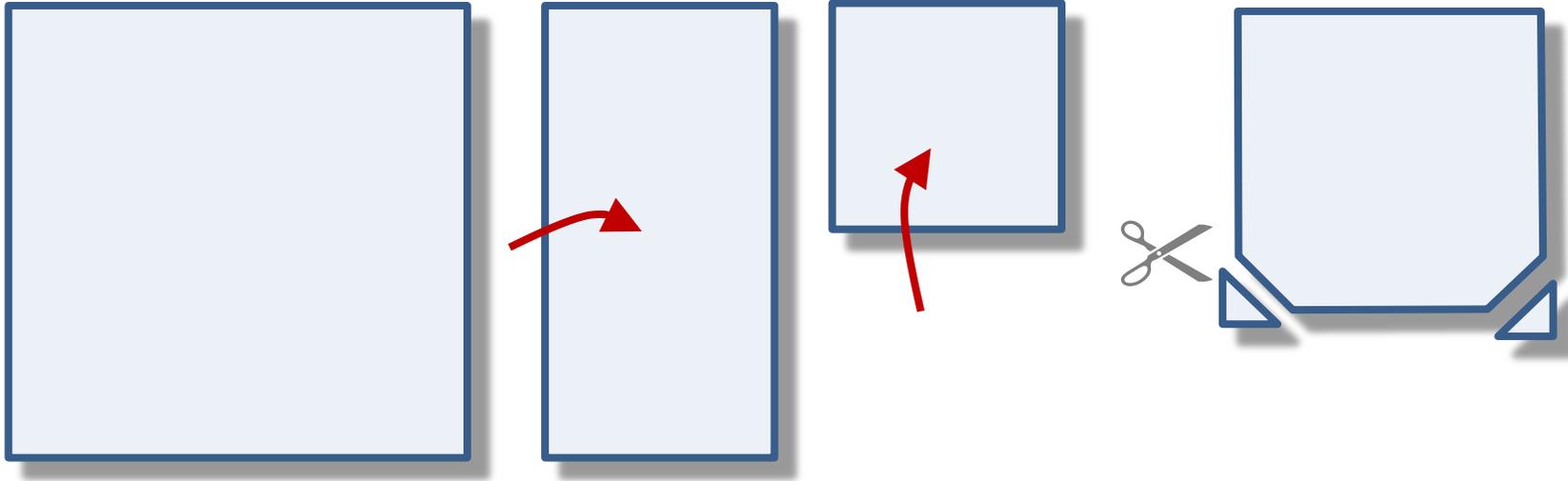
# Tetraeder



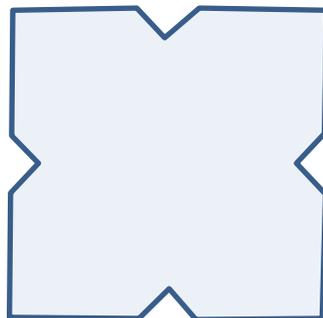
# Tetraeder



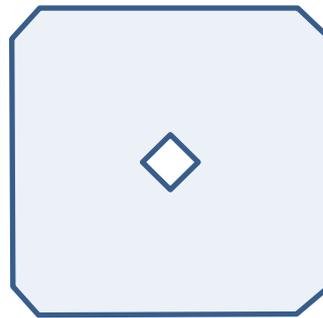
# Papiermuster



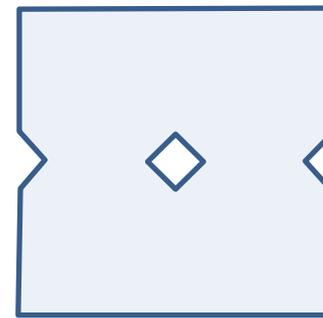
A ✘



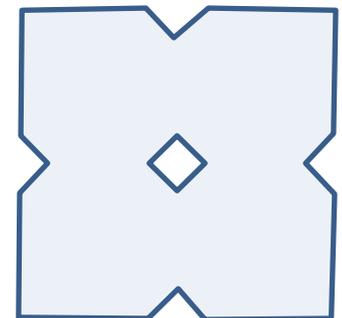
B ✘



C ✘

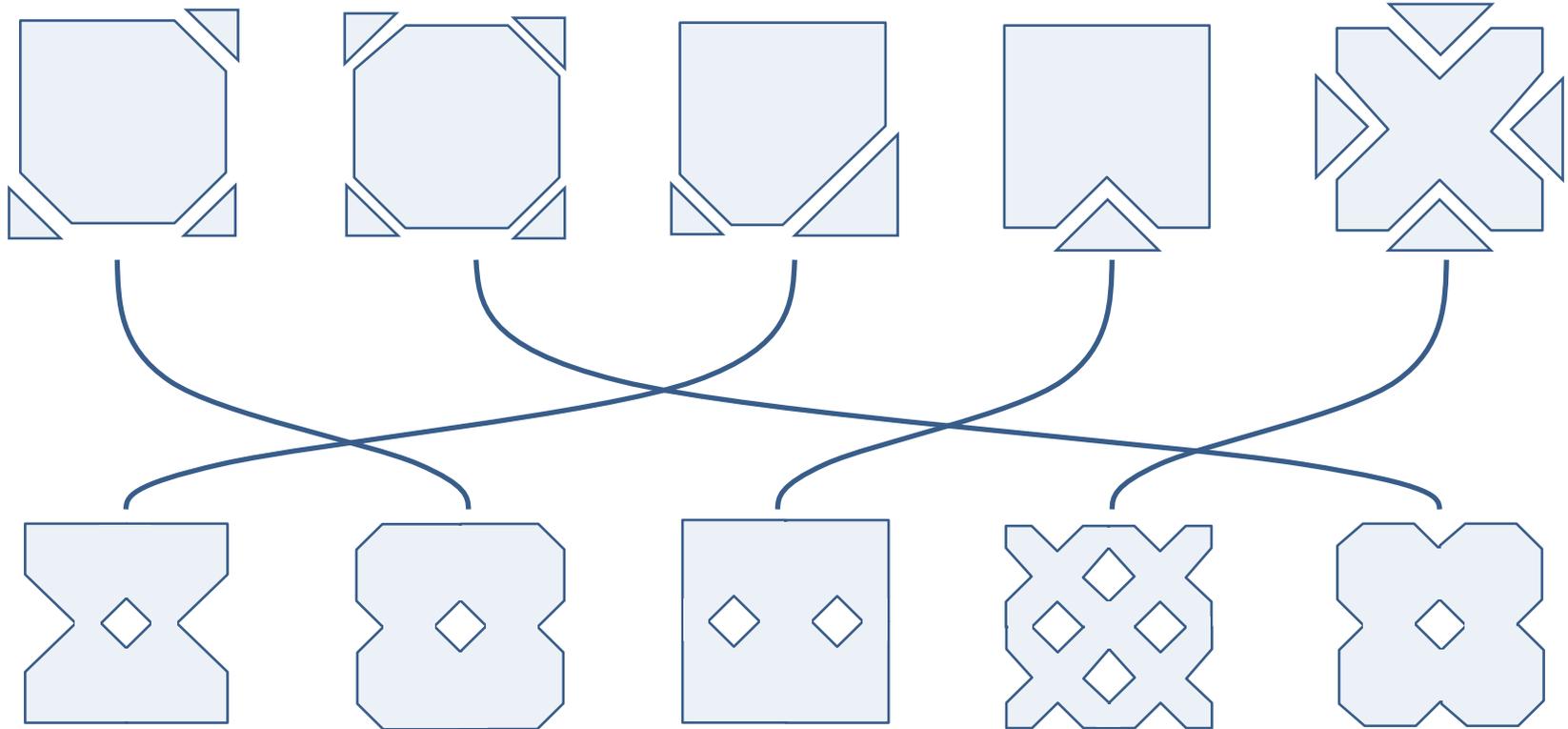


D ✔

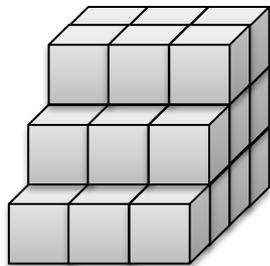
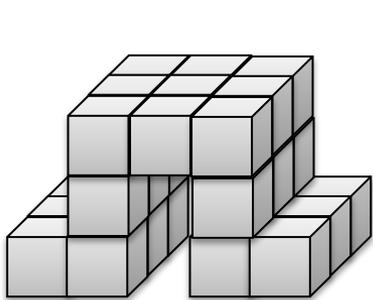
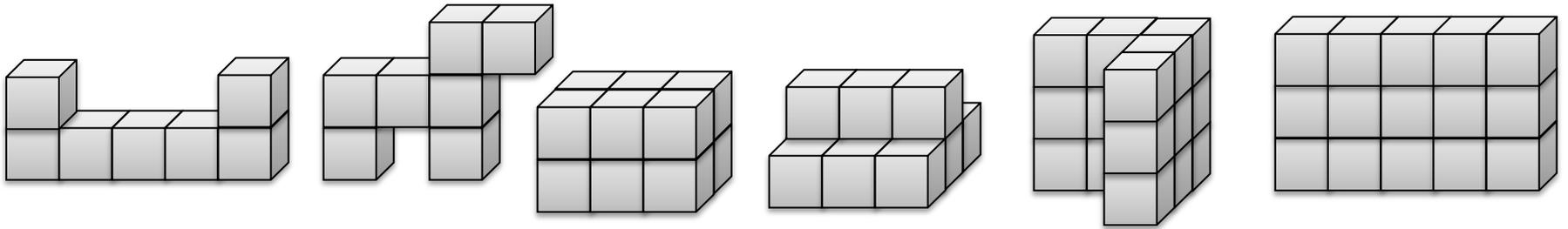
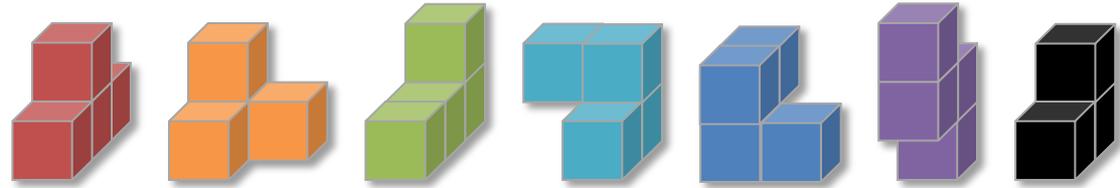


E ✘

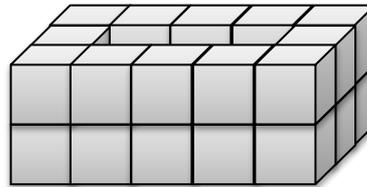
# Papiermuster



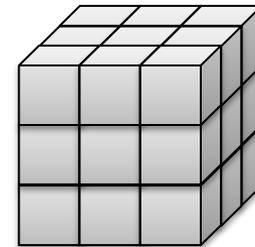
# Soma-Würfel



3	3	3
3	3	3
2	2	2
1	1	1

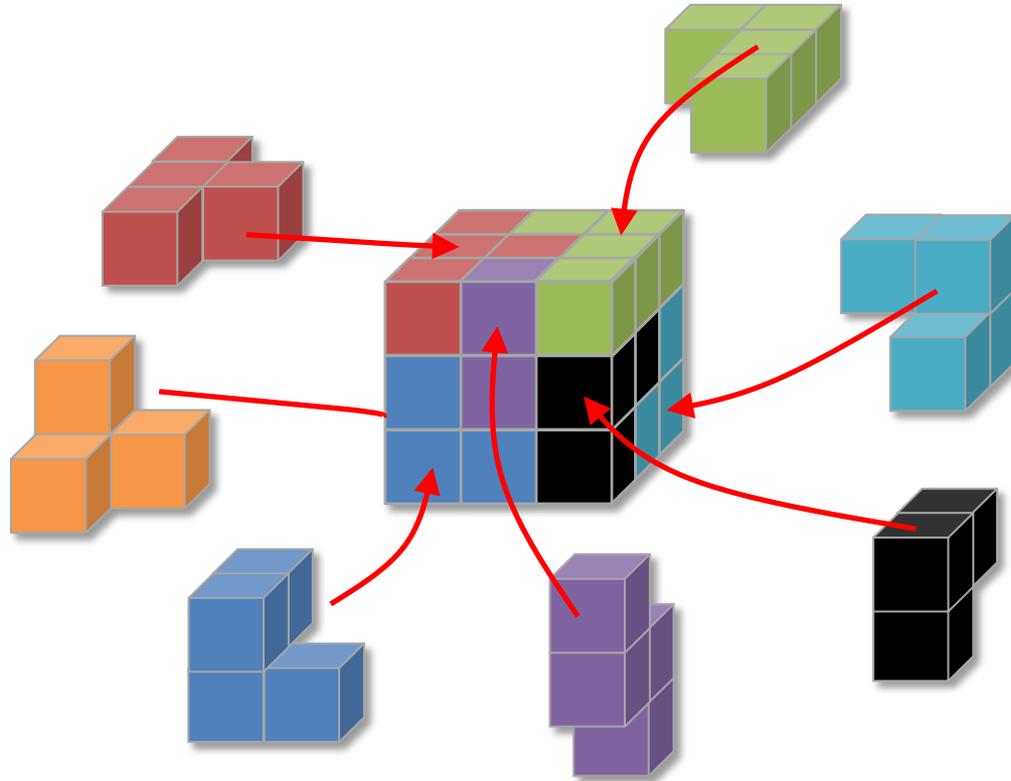


2	2	2	2	2
2	1	1	1	2
2	2	2	2	2



3	3	3
3	3	3
3	3	3

# Soma-Würfel



Wie sehen die drei Seiten des Würfels aus, die man zurzeit nicht sieht?

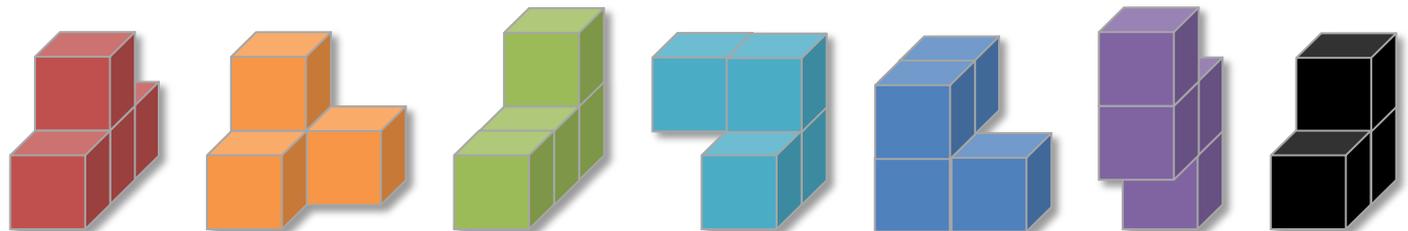
Welche Farbe hat der mittlere Würfel, den man nicht von außen sehen kann?

# Soma-Würfel

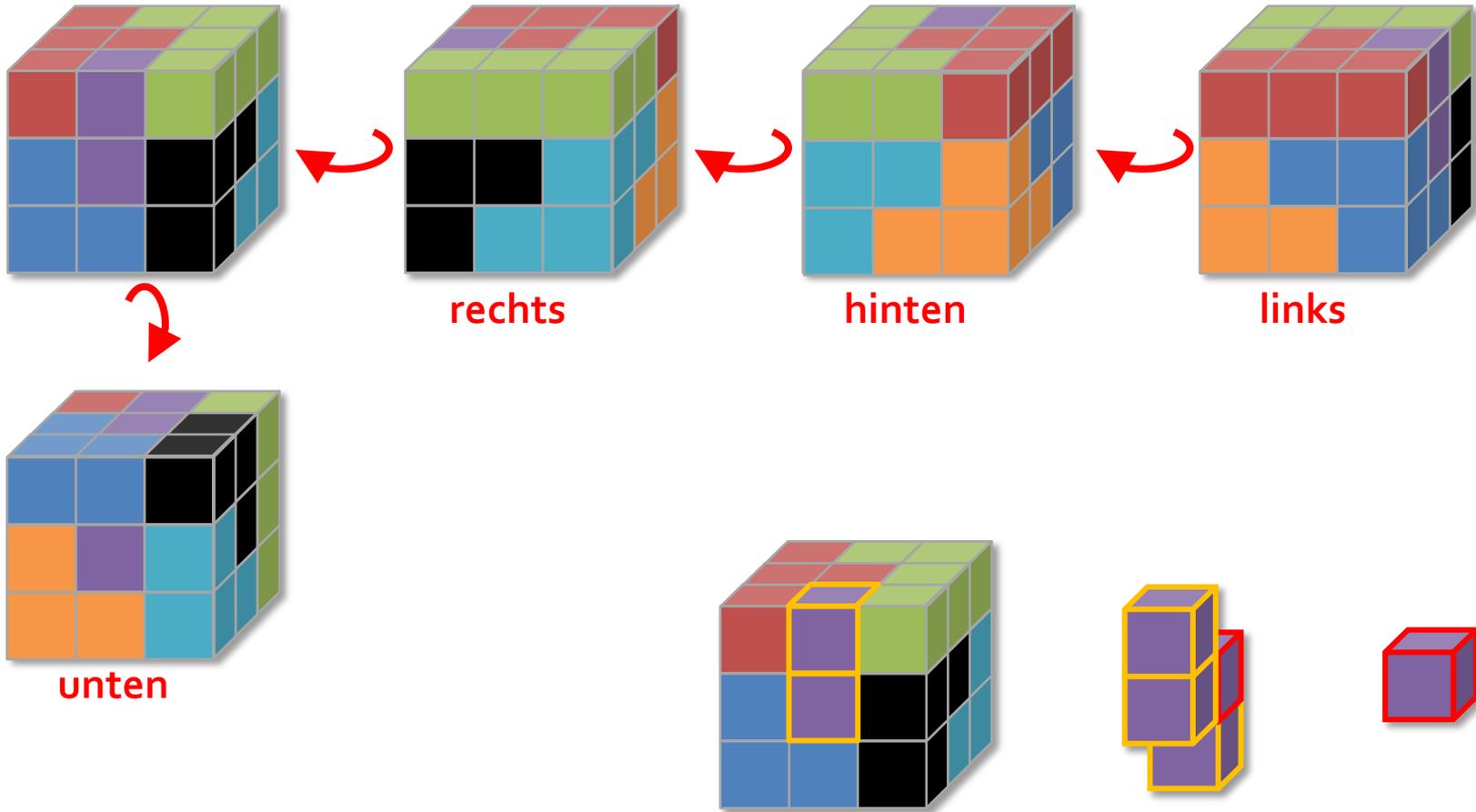


Wie sehen die drei Seiten des Würfels aus, die man zurzeit nicht sieht?

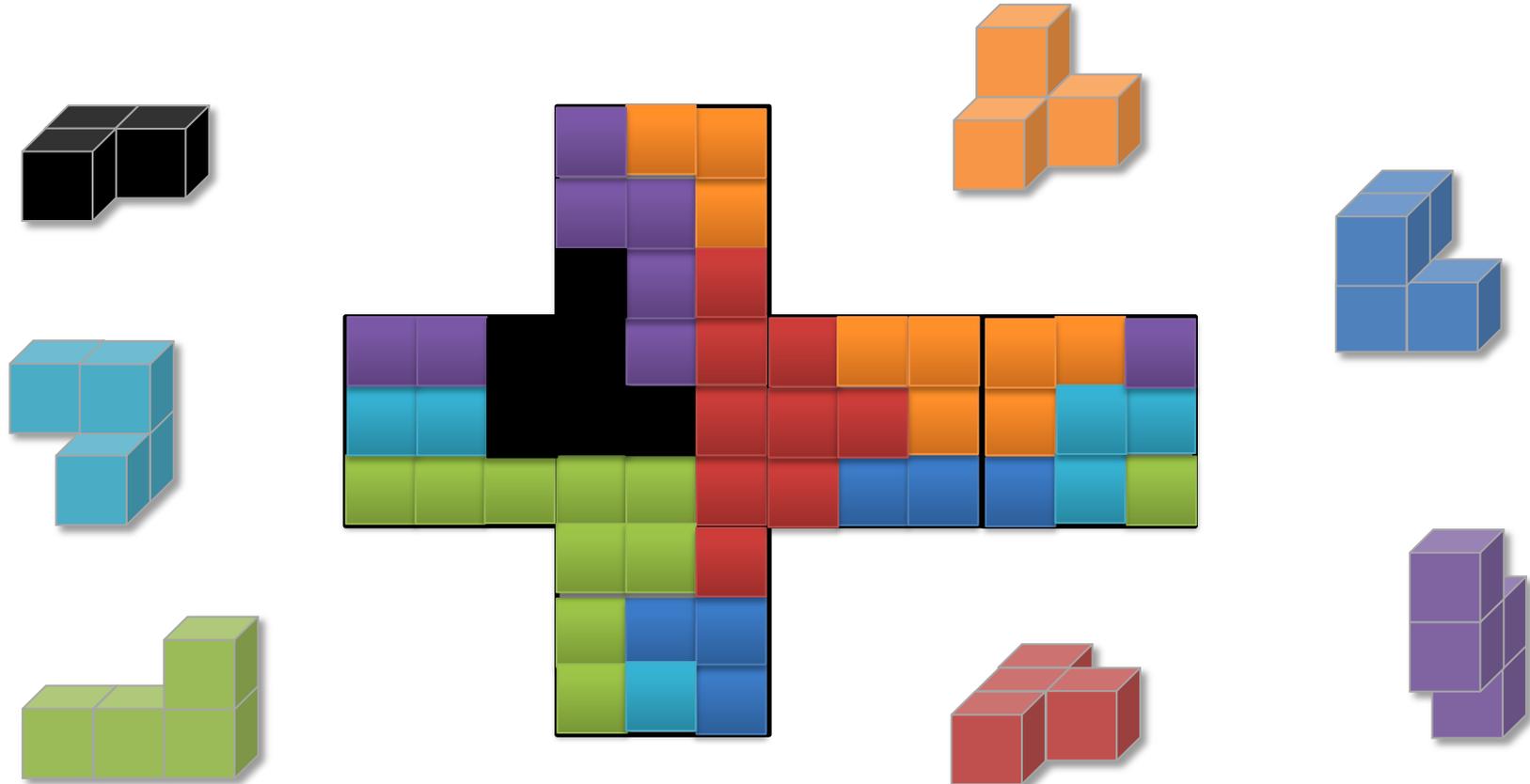
Welche Farbe hat der mittlere Würfel, den man nicht von außen sehen kann?



# Soma-Würfel



# Soma-Würfel



Welche Farbe hat der Würfel, den man nicht von außen sehen kann?



# Räumliche Beziehungen: Schattenspiel

Ein Körper wird in einer Raumecke von drei Lampen so angeleuchtet, dass drei Schattenfiguren entstehen.

1. Beschreiben Sie einen Körper, sodass die drei Schattenfiguren jeweils einen Kreis darstellen.
2. Überlegen Sie, welche Schattenkombinationen (Kreis, Dreieck und Viereck) entstehen können.

